corank2の5重孤立特異点の分類と標準型

AUTHOR(S):

卜部, 東介

CITATION:

卜部, 東介. corank2の5重孤立特異点の分類と標準型. 代数幾何学シンポジューム記録 1982, 1982: 227-250

ISSUE DATE:

1982

代数幾何学シンポジウム記録
1982年度　pp.227-250

corank 2 の 5 重孤立特異点の分類と標準型

都立大理　卜部東介

§0. はじめに

学問の傾向を区分するために，分野ということばを使うのならば，「特異点の理論」と呼ばれる数学の分野がある。いや，分野と言われるまでに至っていないかもしれない。特異点ということばをキーワードに使う数学者全体を漠然と指しているのにすぎないのかもしれない。その研究の技法たるや多種多岐にわたり，技法から判断すればある学者は代数幾何学者であり，他の者はトポロジストであり，また解析学者も多いといったところであろうか。なぜそのような分野が成立しえるのかといえば，多様体や微分方程式の性質は特異点の周辺に集中して現われてくるからだ。また数学的対象を認識しようとするとき，のっぺりとした一般の点より，形状の特異な点がまず認識されるからだと答えてもよい。滑らか

な多様体の性質を論じていても特異点を扱わなければならない状況に自然と踏み込んでしまうことは多少数学をやった者ならば誰もが感じる現象であろう。

さて特異点の理論における重要な寄与のひとつにArnoldによる特異点の分類がある。これは複素数体$\mathbb{C}$上の解析関数のもつ孤立特異点を簡単なものから順に一覧表を作ったものである。むろん特異点にはいくらでも複雑なものがあり，すべての特異点の表を作ることはできないので，適当なところでうち切ってある。彼はこの表を作成しながら，いくつかの数学的現象を発見した。

まず，超曲面孤立特異点を分類する時，modality (= modulus number) と呼ばれる量が基本的であること。$f \in \mathbb{C}\{x_1, \cdots, x_n\}$が原点に孤立特異点を持つとする時，$f$のmodality $m(f)$とはfのsemi-universal deformationのbase spaceでfと同じミルナー数$\mu(f)$を持つfの変型に対応する点全体（μ-constant stratumと呼ばれる。）の集合の次

元から引くことの1である。

ここで簡単のためにしばらく変数の数 $n=3$ つまり $f=0$ は曲面の孤立特異点を定義すると仮定する。

この時，$m(f)=0$ であることは，f が2重線のないディンキン図形即ち，A_k, D_m, E_ℓ（$k\geqq 1$, $m\geqq 4$, $\ell=6,7,8$）の名を持つ特異点，単純特異点であることに限る。

$m(f)=1$ であることは

I. $\tilde{E}_6$: $x^3+y^3+z^3-axyz=0$

$\tilde{E}_7$: $x^2+y^4+z^4-axyz=0$

$\tilde{E}_8$: $x^2+y^3+z^6-axyz=0$ （aは定数）

II. $T_{p,q,r}$: $x^p+y^q+z^r-axyz=0$ （aは定数）

但し，p, q, r は正整数 $1/p+1/q+1/r<1$

III. 14個の例外型特異点

$E_{12}=S_{2,3,7}$, $E_{13}=S_{2,3,8}$, $E_{14}=S_{2,3,9}$, $Z_{11}=S_{2,4,5}$, $Z_{12}=S_{2,4,6}$

$Z_{13}=S_{2,4,7}$, $W_{12}=S_{2,5,5}$, $W_{13}=S_{2,5,6}$, $Q_{10}=S_{3,3,4}$, $Q_{11}=S_{3,3,5}$

$Q_{12}=S_{3,3,6}$, $S_{11}=S_{3,4,4}$, $S_{12}=S_{3,4,5}$, $U_{12}=S_{4,4,4}$

（左辺はArnoldの命名，右辺はBrieskornによる。）

のいずれかであることに同じである。

m(f)=2の超曲面孤立特異点の一覧表も与えられている。

このArnoldの結果をふまえ，GabrielovとDolgachevの結果により，上述Ⅲの14個の特異点の間に奇妙な双対性（strange duality）という現象が観察された。（$S_{2,3,8} \leftrightarrow S_{2,4,5}$，$S_{2,3,9} \leftrightarrow S_{3,3,4}$，$S_{2,4,7} \leftrightarrow S_{3,3,5}$ $S_{2,5,6} \leftrightarrow S_{3,4,4}$，残り6個はself-dual.）それはのちにPinkhamによってK3曲面を用いて説明が与えられた。また中村郁氏によりⅡ．$T_{p,q,r}$にも双対性があり井上曲面により説明がつけられることが示された。2つの有理曲線の輪をもつある種の井上曲面の片方の輪を孤立特異点へつぶしその後変型すると有理曲面になることから，Looijengaにより有理曲面の理論との関連も論じられた。（[1]，[2]，[3]，[4]，[5] e.t.c.）

以上のような事実を考慮し，私はmodality 3，4の特異点の一覧表を作る試みを行なってみた。最も特色ある特異点が現われると思われるquasi-homogeneousの場合はSuzuki-Yoshinaga [6]によってすでになされているので，

quasi-homogeneous でない場合を扱ってみた。努力不足が原因で modality 3 の場合の表すらまだ得られておらず，特徴的な現象も発見できないでいるが，Arnold による関数の簡約化の方法を改良することに成功した。

以下順次，我々の結果を説明したい。まず用語をすこし：

<u>定義 0．1．</u> 2つの関数芽 $f, g ; (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$（$\mathbb{C}^n$ の 0 の近傍で定義された解析関数で $f(0)=0$, $g(0)=0$ となるもの。）が <u>right-equivalent</u> であるとは同型 $\Phi : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$（解析的双正則写像で原点の近傍で定義され $\Phi(0)=0$ となるもの。）があって $f = g \circ \Phi$ となることである。これを $f \sim g$ と記す。

<u>補題 0．2．</u> $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ が原点 0 に孤立特異点をもつとする。このとき f は有限決定である。つまり $f = \sum c_{\alpha_1 \cdots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$（$c_{\alpha_1 \cdots \alpha_n} \in \mathbb{C}$，$0 \leq \alpha_j \in \mathbb{Z}$）と展開する時十分大きな

k について f はその k-jet と right-equivalent.

$$f \sim \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n \leq k} c_{\alpha_1\cdots\alpha_n} x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$$

この補題 0.2. により収束を気にせず形式的巾級数だと考えて処理して良いことになる。形式的巾級数に対しても right-equivalence を自然に拡張して定義しておく。

<u>定義 0.3.</u> 形式的巾級数 $f \in \mathbb{C}[[x_1, \cdots, x_n]]$, $f(0)=0$ について $r = \mathrm{rank}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0)\right)_{1\leq i,j\leq n}$ を f の <u>rank</u>, $n-r$ を f の <u>corank</u> と言う.

<u>補題 0.4.</u> (一般化された Morse の補題)

m を $f \in \mathbb{C}[[x_1, \cdots, x_n]]$, $f(0)=0$ の corank とする. この時, $g \in \mathbb{C}[[x_1, \cdots, x_m]]$ (m 変数巾級数), $\mathrm{ord}(g) \geq 3$ をうまく選べば

$$f \sim g + \sum_{j=1}^{n-m} (x_{m+j})^2$$

この補題により corank ≤ 1 の原点に孤立特異点をもつ関数 $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ はただちに分

類できる。ある $k \geq 1$ について

$$f \sim x_1^{k+1} + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

となり，これは A_k型の特異点である。

corank = 2 の時は，f は 2 変数巾級数 $f = \sum c_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta$，$c_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}$，$0 \leq \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ であるとしてよい。さらに $\mathrm{ord}(f) \leq 4$ の時は Arnold が完全に分類した。$\mathrm{ord}(f) = 5$ の時はそのイニシアル多項式 $f_0 = \sum_{\alpha+\beta=5} c_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta$ が 5 つの重複度 1 の斉次解をもつ場合のみ Arnold は扱った。

modality 3 の一覧表を作るとすれば，第一に corank = 2 で $\mathrm{ord}(f) = 5$ のより特殊な場合を扱わねばならない。（corank = 3 で Arnold のやり残している部分も次にアタックせねばならない。）我々は 2 変数，$\mathrm{ord}(f) = 5$ で原点に孤立特異点をもつ巾級数を完全に分類し，各クラスに対し modality 及びミルナー数を与えた。その一覧表は繁雑であるので，きょうはその分類の方法のみを説明したい。

方法は単純で座標変換により f をできるだけ簡単な形に簡約化しながら，どこまで簡約

化できるかを場合わけして数え上げていくことである.

Arnoldの方法に加えて,我々は$\mathbb{C}[[x,y]]$が一意分解環であることを積極的に使い,$f=g\cdot h$と因数分解し,hをまず簡約化し標準型になおし,次にhの形を固定したままgを簡約化するという手続きを確立した.

またfを低次の項から能率よく標準化していく強力な手段としてArnoldが導入したspectral sequenceについても説明したい.

平面曲線の特異点のトポロジカルタイプは各分枝のPuiseux exponentsと分枝間の交点数で完全に分類されるのではあるが,我々の分類も別の観点からの試みとして意味をもつと思う.

§1. 簡約化の基本定理

$A=\mathbb{C}[[x,y]]$(2変数形式的巾級数環)と書く.互いに素な正整数w_1, w_2を選び変数に重み$w_1=wt(x)$, $w_2=wt(y)$を与えておく.この時

$0 \neq \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta = f \in A$ ($c_{\alpha\beta} \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$) の重みを $\mathrm{wt}(f) = \min\{\alpha w_1 + \beta w_2 \mid c_{\alpha\beta} \neq 0\}$ と定め，

$f_0 = \sum_{\alpha,\beta;\ \alpha w_1+\beta w_2 = N} c_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta$ $(N = \mathrm{wt}(f))$ を f の<u>イニシアル多項式</u>と呼ぶ。

<u>命題1.1.</u>（因数分解定理）　巾級数 $0 \neq f \in A$ に対してそのイニシアル多項式 f_0 は互いに素な擬斉次多項式 $\bar{g}$, $\bar{h}$ の積 $f_0 = \bar{g}\bar{h}$ であると仮定する。この時次の性質(1)，(2)をもつ巾級数 $g, h \in A$ が存在する．

(1) $f = gh$

(2) g のイニシアル多項式 $= \bar{g}$

h のイニシアル多項式 $= \bar{h}$

証明はここでは省略する．（Cf. [7]）

この定理はもし $f \in \mathbb{C}[[x]][y]$（y については多項式）ならばヘンゼルの補題と同等とも思えるが，巾級数に対して証明してある文献を私は知らない．ともあれこの定理により，イニシアル多項式を見るだけで，大域的な因数分解がえられることとなる．そこで以下では

fg の形の巾級数を g の形を変えないで，座標変換により f をできるだけ簡単にする方法を考える．

$f, g \in A$ を固定する．$N = wt(f)$, $M = wt(g)$ と書く．$f = f_0 + f_1 + \cdots$ （$wt(f_p) = N+p$）

$g = g_0 + g_1 + \cdots$ （$wt(g_q) = N+q$）

と擬斉次部分に分解しておく．Θ' を g にそうベクトル場のなす A-module

$$\Theta' = \{\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y} = \theta \mid \alpha, \beta \in A, \ \theta g \in Ag\}$$

とし，A-linear morphism $\omega : \Theta' \longrightarrow A$ を $\omega(\theta) = \theta g/g$ で定義する．A の下降フィルトレーション $A \supset \cdots \supset A^p \supset A^{p+1} \supset \cdots$ 及び Θ' の下降フィルトレーション $\cdots \supset \Theta'^q \supset \Theta'^{q+1} \supset \cdots$ を

$$A^p = \{0 \neq f \in A \mid wt(f) \geqq p\} \cup \{0\}$$

$$\theta \in \Theta'^q \iff \forall p \quad \theta A^p \subset A^{p+q}$$

という条件で定める．

<u>補題 1.2.</u> 次の (a), (b) を仮定する．

(a) $s \geqq 1$ に対して $\theta \in \Theta'^s$．

(b) $d \geqq 1$ に対して $u = \theta(f) + \omega(\theta)f \in A^{N+d}$.

この時次の条件を満たす $\varepsilon, \delta, w \in A$ が存在する。

(i) $wt(\varepsilon) \geqslant wt(x) + s$, $wt(\delta) \geqslant wt(y) + s$

(ii) $g(x+\varepsilon, y+\delta) = w(x, y) g(x, y)$

(iii) $f(x+\varepsilon, y+\delta) w(x, y) = f_0(x, y) + f_1(x, y) + \cdots + f_d(x, y)$
$+ u(x, y) + R$

ここで $R \in A^{N+d+1}$

証明を与える前に意味を説明しよう。(a)と(i)により，$x \longmapsto x+\varepsilon$, $y \longmapsto y+\delta$ は形式的座標変換を定める。それにより関数 $(fg)(x, y)$ は次のように変換される。

$$(fg)(x+\varepsilon, y+\delta) = f(x+\varepsilon, y+\delta) w(x, y) g(x, y)$$
$$= (f_0(x, y) + f_1(x, y) + \cdots + f_d(x, y) + u(x, y) + R) g(x, y).$$

もし g がすでに標準型に簡約されているとすれば，u を適当に選んでいくことにより，f を順次低階項から簡約していくことができることを上の等式は示している。また $g=1$ とおけば拘束条件なしの f の簡約手続を与える。

証明． $\theta = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$, $a, b \in A$ と書く。 $\phi = \phi(x, y; t)$ $\psi = \psi(x, y, t) \in \mathbb{C}[[x, y, t]]$ を常微分方程式

$$d\phi/dt = a(\phi, \psi), \quad d\psi/dt = b(\phi, \psi)$$

の初期条件 $\phi(x, y; 0) = x$, $\psi(x, y; 0) = y$ を満たす解とする。今の場合次のように表示できる．

$$\phi = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \theta^{\nu}(x) \cdot t^{\nu}, \quad \psi = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \theta^{\nu}(y) t^{\nu}.$$

仮定 (a) よりすべての整数 $\nu \geq 0$ に対して

$$wt(\theta^{\nu+1}(x)) > wt(\theta^{\nu}(x)), \quad wt(\theta^{\nu+1}(y)) > wt(\theta^{\nu}(y))$$

である，従って ϕ, ψ に $t = 1$ を代入できる．

$$\phi(x, y; 1) = x + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \theta^{\nu}(x), \quad \psi(x, y; 1) = y + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \theta^{\nu}(y)$$

これは A の元である．実は

$$\varepsilon = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \theta^{\nu}(x), \quad \delta = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \theta^{\nu}(y)$$

が求める元なのである。(i) を満たすことはあきらかである。(ii) を示す，まず

$$\begin{aligned} dg(\phi, \psi)/dt &= (\partial g/\partial x)(\phi, \psi) \cdot d\phi/dt + (\partial g/\partial y)(\phi, \psi) \cdot d\psi/dt \\ &= a(\phi, \psi) \cdot (\partial g/\partial x)(\phi, \psi) + b(\phi, \psi) \cdot (\partial g/\partial y)(\phi, \psi) \\ &= (\theta g)(\phi, \psi) = (\omega(\theta) g)(\phi, \psi) \end{aligned}$$

に注意する． $\lambda(x, y, t) \in \mathbb{C}[[x, y, t]]$ を

$$\lambda(x, y; t) = \int_0^t (\omega(\theta) \quad)(\phi, \psi) dt = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(\nu+1)!} \theta^{\nu}(\omega(\theta) \quad) t^{\nu+1}$$

で定義する．常微分方程式の解の一意性より

$$g(\phi, \psi) = \exp(\lambda) g(x, y)$$

を得る。明らかに $\lambda(x, y, 1)$ は意味をもつから，

$w(x, y) = \exp(\lambda(x, y, 1))$ とおけば，$g(x+\varepsilon, y+\delta) = w(x, y) g(x, y)$.

次に (iii) を示す。まず

$$\theta(fg) = \theta(f) \cdot g + f\theta(g) = (\theta(f) + \omega(\theta) f) g = ug$$

に注意する．P_μ $(\mu = 0, 1, 2, \cdots)$ を帰納的に等式

$$\theta^\nu(g) = P_\mu \cdot g$$

により定める．明らかに $P_0 = 1$，そして $\mu \geqq 1$ の時 $wt(P_\mu) \geqq 1$ である．さて

$$f(x+\varepsilon, y+\delta) w(x, y) g(x, y)$$
$$= f(x+\varepsilon, y+\delta) g(x+\varepsilon, y+\delta)$$
$$= (fg)(\phi(x, y, 1), \psi(x, y, 1))$$
$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \theta^\nu(fg)$$
$$= fg + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \theta^{\nu-1}(ug)$$
$$= fg + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\nu-1} \frac{1}{\nu!} \frac{(\nu-1)!}{\mu!(\nu-\mu-1)!} \theta^{\nu-\mu-1}(u) \theta^\mu(g)$$
$$= \left(f + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\nu-1} \frac{1}{\nu!} \frac{(\nu-1)!}{\mu!(\nu-\mu-1)!} \theta^{\nu-\mu-1}(u) P_\mu\right) g$$

これより

$$f(x+\varepsilon, y+\delta) w(x, y)$$
$$= f + \sum_{\nu>\mu} \frac{1}{\nu} \frac{1}{\mu!(\nu-\mu-1)!} \theta^{\nu-\mu-1}(u) P_\mu$$

$$\equiv f + \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{(\mu+1)!} u \cdot P_\mu \pmod{A^{N+d+1}} \text{（仮定(b)）}$$
$$\equiv f + u \pmod{A^{N+d+1}} \text{（上記注意）}$$

Q.E.D.

仮定(a),(b)の下で $u=\theta(f)+w(\theta)f$ の形の元は簡約して0にできることがわかったが，そのようなuを計算する手段として次に spectral sequence を導入しよう．

まず復習．$K^\bullet$ を下降フィルトレーション$F^\bullet$をもつコチェインコンプレックスとする．

$$Z_r^{pq} = \mathrm{Ker}(d : F^p(K^{p+q}) \to K^{p+q+1}/F^{p+r}(K^{p+q+1}))$$

とおく．B_r^{pq} を式

$$K^{p+q}/B_r^{pq} = \mathrm{Coker}(d : F^{p-r+1}(K^{p+q-1}) \to K^{p+q}/F^{p+1}(K^{p+q}))$$

で定める．スペクトル列$\{E_r^{pq}\}$は定義より

$$\begin{aligned} E_r^{pq} &= \mathrm{Im}(Z_r^{pq} \longrightarrow K^{p+q}/B_r^{pq}) \\ &= Z_r^{pq}/(B_r^{pq} \cap Z_r^{pq}) \\ &= \mathrm{Ker}(K^{p+q}/B_r^{pq} \longrightarrow K^{p+q}/(Z_r^{pq}+B_r^{pq})) \end{aligned}$$

である．

我々の問題に帰る．cochain complex

$$K^\bullet : \quad 0 \longrightarrow \Theta' \xrightarrow{\partial} A \longrightarrow 0$$

を考える．$p \neq 0, 1$ の時 $K^p = 0$, $K^0 = \Theta'$, $K^1 = A$, そして $\partial(\theta) = \theta f + \omega(\theta) f$ である．$K^\bullet$ の filtration $F^\bullet$ を

$$F^p \Theta' = \Theta'^p, \qquad F^p A = A^{N+p}$$

により定める．容易に $\partial(F^p\Theta') \subset F^p A$ がわかるから，spectral sequence $E_r^{p,q} = E_r^{p,q}(f; g)$ $(r = 0, 1, 2, \cdots)$ を得る．

$$E_r^{p,q} = 0 \qquad (p+q \neq 0, 1 \text{ のとき})$$

$$E_r^{p,-p} = \frac{\{\theta \in \Theta'^p \mid \theta f + \omega(\theta) f \in A^{N+p+r}\}}{\{\theta \in \Theta'^{p+1} \mid \theta f + \omega(\theta) f \in A^{N+p+r}\}}$$

$$E_r^{p,-p+1} = A^{N+p} / (\Theta'^{p-r+1} f) \cap A^{N+p} + A^{N+p+1}$$ となる．

但し $\Theta'^{p-r+1} f = \{\theta f + \omega(\theta) f \mid \theta \in \Theta'^{p-r+1}\}$ である．以下では簡単のために $A'^p_r = E_r^{p,-p+1}$ と書く．以下の命題たちは補題 1. 2 及び spectral sequence の定義の帰結である．証明は略す．

<u>命題 1. 3.</u> すべての $p \geq 0$ に対し，十分大きい r については $E_r^{p,-p}$ A'^p_r はすべて同型である．そして A - module $\oplus E_\infty^{p,-p}$, $\oplus A'^p_\infty$ は それぞれ ∂ の Kernel, Cokernel に付随した次数つき加群に同

型である。その同型は自然な写像
$\mathrm{Ker}\,\partial \cap \Theta'^{p} \longrightarrow E_r^{p,-p}$, $A^{N+p} \longrightarrow A'^{p}_{r}$ によりみちびかれる。

定理 1.4. (定理 $T'_{r,p}$) $p > r \geqq 0$ と仮定する。自然写像 $A^{N+p} \longrightarrow A'^{p}_{r+1}$ の下で、A'^{p}_{r+1} を $\mathbb{C}$ 上生成する重み $N+p$ の擬斉次多項式の系を $e_0, \cdots, e_u$ とする。この時、形式的座標変換 $x \longmapsto x+\varepsilon$, $y \longmapsto y+\delta$ で次の性質をみたすものが存在する。

(1) $\varepsilon, \delta \in A$　$wt(\varepsilon) \geqq wt(x)+p-r$,　$wt(\delta) \geqq wt(y)+p-r$.

(2) $g(x+\varepsilon, y+\delta) = w(x,y)\, g(x,y)$

(3) $f(x+\varepsilon, y+\delta)\, w(x,y) = f_0(x,y) + \cdots + f_{p-1}(x,y) + \sum c_i e_i(x,y) + R$

ここで $w \in A$, $R \in A^{N+p+1}$, $c_i \in \mathbb{C}$ である。

定理 1.5. (定理 T'_r). $r \geqq 0$ とする。p が $p > r$ なるすべての整数をうごく時、自然写像 $A^{N+p} \longrightarrow A'^{p}_{r+1}$ の下ですべての A'^{p}_{r+1} を生成するような重み $> N+r$ の擬斉次多項式の系を $e_1, e_2, \cdots$ とする。この時形式的座標変換

$x \longmapsto x+\varepsilon$, $y \longmapsto y+\delta$ で次の (1) (2) (3) を満たすものが存在する。

(1) $wt(\varepsilon) > wt(x)$, $wt(\delta) > wt(y)$

(2) $g(x+\varepsilon, y+\delta) = w(x,y)\, g(x,y)$

(3) $f(x+\varepsilon, y+\delta)\, w(x,y) = f_0(x,y) + \cdots + f_r(x,y) + \sum c_i \cdot e_i(x,y)$.

ここで $w(x,y) \in A$, $c_i \in \mathbb{C}$.（$wt(e_i) > N+r$ に注意）

補題 1.2. の仮定 (a) に $s \geqq 1$ という条件があるために Θ' の負の filtration の部分を、注意してとり扱わねばならない。

<u>定義 1.6.</u> $0 \neq h \in A$ について、下の条件を g に関する条件 C' と呼ぶ。

もし、$wt(\theta h + w(\theta) h) > wt(\theta) + wt(h)$ が $\theta \in \Theta'$ について成立するのなら $\theta \in \Theta'^{1}$.

ここで Θ' は g にそうベクトル場のつくる A-module, $wt(\theta) = \min\{p \mid \theta \in \Theta'^{p}\}$ である。

<u>定理 1.7.</u>（定理 C'_p）$wt(f) = N \geqq 1$ なる元 $0 \neq f \in A$ が g に関して条件 C' を満たしたとする。整数

$p \geqq 1$ に対して，自然写像 $A^{N+p} \longrightarrow A'^{p}_{\infty}$ の下で $\mathbb{C}$ 上 A'^{p}_{∞} を生成する重み $N+p$ の擬斉次多項式の系を $e_1, \cdots, e_u$ とする．この時次の(1)(2)(3)を満たす座標変換 $x \longmapsto x+\varepsilon$, $y \longmapsto y+\delta$ が存在する。

(1) $wt(\varepsilon) > wt(x)$, $wt(\delta) > wt(y)$

(2) $g(x+\varepsilon, y+\delta) = w(x, y) g(x, y)$

(3) $f(x+\varepsilon, y+\delta) w(x, y) = f_0(x, y) + \cdots + f_{p-1}(x, y) + \sum c_i e_i(x, y) + R$

ここで $w(x, y) \in A$, $R \in A^{N+p+1}$, $c_i \in \mathbb{C}$.

<u>定理 1. 8.</u> (定理 C'T)　巾級数 $f \in A$, $f \neq 0$, $wt(f) = N \geqq 1$ が g に関して条件 C' を満たすと仮定する。$p \geqq 1$ が正整数を動くとき自然写像 $A^{N+p} \longrightarrow A'^{p}_{\infty}$ の下ですべての A'^{p}_{∞} を $\mathbb{C}$ 上生成するような擬斉次多項式の系を $e_1, e_2, \cdots$ とする．この時形式的座標変換 $x \longmapsto x+\varepsilon$, $y \longmapsto y+\delta$ で次の性質を持つものが存在する。

(1) $\varepsilon, \delta \in A$, $wt(\varepsilon) > wt(x)$, $wt(\delta) > wt(y)$

(2) $g(x+\varepsilon, y+\delta) = w(x, y) g(x, y)$

(3) $f(x+\varepsilon, y+\delta)w(x,y) = f_0(x,y) + \sum c_i e_i(x,y)$
ここで $w(x,y) \in A$ そして $c_i \in \mathbb{C}$.

以上の定理たちにより，関数の簡約化は spectral sequence の計算に帰着される．

§2. 準普遍性定理

§1 の定理たちを使って簡約化を行なったとしよう．この時，座標変換により消去できる項がそれ以上ないかどうかが不安になる．それを保障する定理をのべよう．

<u>定理2.1.</u>　$f=f(x,y)$, $g=g(x,y)$ を $\mathbb{C}^2$ の原点の近傍で定義された解析関数とする．原点は fg の孤立特異点であると仮定する．$d_1, \cdots d_\sigma$ を $\mathbb{C}[[x,y]]/(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, g)$ で $\mathbb{C}$ 上の基底を定義する多項式の系とする．$G(x,y,t) = g + \sum_{i=1}^{\sigma} t_i d_i$ とおく．Θ' を g に沿うベクトル場のつくる $\mathbb{C}[[x,y]]$-module とする．$e_1, \cdots, e_\nu$ を $\mathbb{C}[[x,y]]/\Theta' f$ で $\mathbb{C}$-基底　を定義する多項式

の系とする。ここで $\Theta' f = \{\theta f + (\theta g \cdot f / g) \mid \theta \in \Theta'\}$ である。$F(x, y, s) = f + \sum_{i=1}^{\nu} s_i e_i$ とおく。この時原点の近傍 $U \subset \mathbb{C}^{\nu} \times \mathbb{C}^{\sigma}$ で次の性質をもつものが存在する；$(s_0, t_0) \in U$ に対して、$F(x, y, s_0)$ $G(x, y, t_0)$ が f g と right-equivalent ならば $(s_0, t_0) = (0, 0)$.

証明は[7]を見てほしい。

以上の定理をどう使うか実例を上げて説明したいのだが、紙数がつきてしまった。昨年秋の数理研における特異点のシンポジウムで実例について解説したので、そちらを見ていただきたい。

講演後質問をうけた事項について詳説する．次の命題はその質問に解答する．

命題3.1. $x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n$ を独立変数とする．$z_1, \cdots, z_m, w_1, \cdots, w_n \in A = \mathbb{C}[[x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n]]$ をAの正則パラメーター系とする．$f \in \mathbb{C}[[x_1, \cdots, x_m]]$ と $g \in \mathbb{C}[[z_1, \cdots, z_m]]$ に対してAの元として次の等式が成立するとする．

$$(*) \quad f(x_1, \cdots, x_m) + y_1^2 + \cdots + y_n^2 = g(z_1, \cdots, z_m) + w_1^2 + \cdots + w_n^2$$

さらに $\mathrm{ord}(f) \geq 3$, $\mathrm{ord}(g) \geq 3$ と仮定する．この時，正則パラメーター系 $\tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_m \in \mathbb{C}[[x_1, \cdots, x_m]]$ が存在して

$$f(x_1, \cdots, x_m) = g(\tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_m)$$

つまり f と g は right-equivalent.

証明． (*) を x_i で偏微分する．

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial z_j}\frac{\partial z_j}{\partial x_i} + 2\sum_{k=1}^{n} w_k \frac{\partial w_k}{\partial x_i}$$

$\mathrm{ord}(f) \geqq 3$, $\mathrm{ord}(g) \geqq 3$ に注意すると，これより

$$0 \equiv 2\sum w_k \frac{\partial w_k}{\partial x_i} \qquad \mathrm{mod}\ (x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n)^2$$

これは $\frac{\partial w_k}{\partial x_i}(x, y) \in (x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n)$．即ち $\frac{\partial w_k}{\partial x_i}(0, 0) = 0$ $(1 \leqq i \leqq m,\ 1 \leqq k \leqq n)$

を示す．従って Jacobian の 0 での値について

$$0 \neq \frac{\partial(z_1, \cdots, z_m, w_1, \cdots, w_n)}{\partial(x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n)}(0) = \frac{\partial(z_1, \cdots, z_m)}{\partial(x_1, \cdots, x_m)}(0) \times \frac{\partial(w_1, \cdots, w_n)}{\partial(y_1, \cdots, y_n)}(0)$$

これより $\frac{\partial(z_1, \cdots, z_m)}{\partial(x_1, \cdots, x_m)}(0) \neq 0$ であり，$z_i = z_i(x, y)$ に対して $\bar{z}_i = z_i(x, 0) \in \mathbb{C}[[x_1, \cdots, x_m]]$ とおくと，$\bar{z}_1, \cdots, \bar{z}_m$ は $\mathbb{C}[[x_1, \cdots, x_m]]$ の正則パラメーター系であることがわかる．

さて今度は，$z_1, \cdots, z_m, w_1, \cdots, w_n$ を独立変数とみて w_i で (*) を偏微分

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial w_i} + 2\sum_{k=1}^{n} y_k \frac{\partial y_k}{\partial w_i} = 2w_i$$

そこで，$w_i = w_i(x, y)$ に対して $\bar{w}_i = w_i(x, 0)$，$\bar{u}_{ji}(x) = \frac{1}{2}\frac{\partial x_j}{\partial w_i}(x, 0)$ とおくと $\bar{w}_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j}\bar{u}_{ji}$

だから (*) に $y_1 = \cdots = y_n = 0$ を代入すると

$$f(x_1, \cdots, x_m) = g(\bar{z}_1, \cdots, \bar{z}_m) + \sum_{i=1}^{n}\Bigl(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j}\bar{u}_{ji}\Bigr)^2$$

ここで，$u_j = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_k}\bar{u}_{ji}\bar{u}_{ki}$ とおけば，$\sum_{i=1}^{n}\Bigl(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_j}\bar{u}_{ji}\Bigr)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_k}\bar{u}_{ji}\bar{u}_{ki} = -\sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial f}{\partial x_j}$

つまり g と

$$h = f + \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

は right-equivalent．定義と仮定より $\mathrm{ord}(u_j) \geqq 2$，かつ $u_j \in \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_m}\right)$ であることに注意すれば次の補題が適用でき，それをくり返し用いれば h は f と right-equivalent であることがわかる．つまり f と g は right-equivalent． Q.E.D.

<u>補題 3. 2.</u> $f, u_1, \cdots, u_m \in \mathbb{C}[[x_1, \cdots, x_m]]$ に対して，次をおく．

$$h = f + \sum_{j=1}^{m} u_j \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

そして (a) $p = \min_j \mathrm{ord}(u_j) \geqq 2$

(b) $u_j \in \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_m}\right)$，$1 \leqq j \leqq m$

(c) $\mathrm{ord}(f) \geqq 3$

と仮定する．このとき次の性質 (1)(2)(3)(4) をもつべき級数 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m, v_1, \cdots, v_m \in \mathbb{C}[[x_1, \cdots, x_m]]$ が存在する．

(1) $\mathrm{ord}(\varepsilon_i) \geqq p$，$1 \leqq i \leqq m$

(2) $\mathrm{ord}(v_i) \geqq p+1$，$1 \leqq i \leqq m$

(3) $h(x_1+\varepsilon_1, x_2+\varepsilon_2, \cdots, x_m+\varepsilon_m) = f(x_1, \cdots, x_m) + \sum_{j=1}^{m} v_j(x_1, \cdots, x_m)\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \cdots, x_m)$

(4) $v_1, \cdots, v_m \in \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_m}\right)$

証明．$\theta = -\sum_{j=1}^{m} u_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ とおく．これは微分作用素であり，任意の $a \in \mathbb{C}[[x_1, \cdots, x_m]]$ に対して

※ $\mathrm{ord}(\theta(a)) \geqq \mathrm{ord}(a) + p - 1 > \mathrm{ord}(a)$

となる．$\phi_1, \cdots, \phi_m \in \mathbb{C}[[x_1, \cdots, x_m, t]]$ を常微分方程式系

$$\frac{d\phi_i}{dt} = u_i(\phi_1, \cdots, \phi_m) \qquad (1 \leqq i \leqq m)$$

の初期条件 $\phi_i(x_1, \cdots, x_m, 0) = x_i$ $(1 \leqq i \leqq m)$ を満たす解とする．今の場合

$\phi_i = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \theta^{\nu}(x_i) t^{\nu}$ と表示できる。※より $t=1$ が代入でき、$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \theta^{\nu}(x_i)$ がべき級数としていみをもつ。

$$\varepsilon_i = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \theta^{\nu}(x_i) = \phi_i(x, 1) - x_i \qquad (1 \le i \le m)$$

とおく。(1) が満たされることがわかる。そして

$$\begin{aligned}
h(x_1+\varepsilon_1, x_2+\varepsilon_2, \cdots, x_m+\varepsilon_m) &= h(\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_m)\big|_{t=1} \\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \theta^{\nu}(h) t^{\nu} \Big|_{t=1} \\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \theta^{\nu}(h) \qquad (\text{※より } t=1 \text{ が代入できる。}) \\
&= (f - \theta f) + \theta(f - \theta f) + \theta\Big[\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \theta^{\nu-1}(h)\Big] \\
&= f + \theta\Big[-\theta f + \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \theta^{\nu-1}(h)\Big]
\end{aligned}$$

ここで、$ord(f) \ge 3$ より、$ord(\theta(f)) \ge 3+p-1 = p+2$。そして $ord(h) = ord(f - \theta f) \ge 3$,
$ord(\theta^{\nu-1}(h)) \ge p+2$ ($\nu \ge 2$ のとき) となるから、$r = -\theta f + \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \theta^{\nu-1}(h)$ とおくと

※ $ord(r) \ge p+2$.

仮定より $u_j = \sum_{i=1}^{m} s_{ji} \frac{\partial f}{\partial x_i}$ $(s_{ji} \in \mathbb{C}[[x_1, \cdots, x_m]])$ とかける。これより

$$\theta(r) = \sum_{j=1}^{m} u_j \frac{\partial r}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{m} s_{ji} \frac{\partial r}{\partial x_j} \Big) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

ここで $v_i = \sum_{j=1}^{m} s_{ji} \frac{\partial r}{\partial x_j}$ とおけば ※ より $ord(v_i) \ge p+1$。つまり (2) が満たされる。

そして $h(x_1+\varepsilon_1, x_2+\varepsilon_2, \cdots, x_m+\varepsilon_m) = f + \theta(r) = f + \sum_{i=1}^{m} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

(3) が満たされる。最後に (4) であるが、容易に

$$r = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu}{(\nu+1)!} \theta^{\nu}(f)$$

となることがわかるから次の補題3.3より、$J = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_m})$ と書くとき、$r \in J^2$。従って $\frac{\partial r}{\partial x_i} \in J$ $(1 \le i \le m)$ となり $v_i = \sum s_{ji} \frac{\partial r}{\partial x_j} \in J$ となる。　Q.E.D

<u>補題3.3</u>　$\nu \ge 1$ について、$\theta^{\nu}(f) \in J^2$

証明。$\nu = 1$ のとき　$\theta(f) = \sum u_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum s_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}$ だからO.K.
$\theta^{\nu-1}(f) \in J^2$ と仮定。$\frac{\partial}{\partial x_i}(\theta^{\nu-1}(f)) \in J$ $(1 \le i \le m)$ となる。仮定より $u_i \in J$ $(1 \le i \le m)$ だから $\theta^{\nu}(f) = \sum u_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\theta^{\nu-1}(f)) \in J^2$.　Q.E.D.

参考文献

[1] Arnol'd, V. I.: Normal forms of functions in neighbourhoods of degenerate critical points, Russian Math. Surveys 29 (1974) 10-50

[2] —— ; Local normal forms of functions, Inv. math. 35 (1976) 87-109

[3] —— : Spectral sequence for reduction of functions to normal form, Func. Anal. and its Appl. 9 (1975) 251-253

[4] Looijenga, E.: Rational surfaces with anti-canonical cycle, Annals of Mathematics, 114 (1981) 267-322

[5] Nakamura, I.; Inoue-Hirzebruch surfaces and a duality of hyperbolic unimodular singularities. I, Math. Ann. 252, 221-235 (1980)

[6] Yoshinaga, E. and Suzuki, M., Normal forms of non-degenerate quasi-homogeneous functions with inner modality ≤ 4, Inv. math. 55 (1979) 185-206

[7] Urabe, T.: On reduction of functions of corank 2 (preprint)

[8] —— : Normal forms of functions of corank 2 with isolated critical points with multiplicity 5 (preprint)